DISTINTOS ENFOQUES EN LA APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS A LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS DE FUNCIONES.

MSc. Julián Rogelio Álvarez López [1], Lic. Milagros de la Caridad Gómez Suárez[2], MSc. Marta García Rodríguez[3]

1. FUM Pedro Betancourt, calle29 #1803, Pedro Betancourt, Matanzas, Cuba.

2. FUM Pedro Betancourt, calle29 #1803, Pedro Betancourt, Matanzas, Cuba.

3. FUM Pedro Betancourt, calle29 #1803, Pedro Betancourt, Matanzas, Cuba.

CD de Monografías 2013

Resumen.

Esta monografía se plantea como objetivo fundamental referir las variantes en el enfoque de la temática aplicación de las derivadas a la construcción de gráficas de funciones durante cinco décadas, teniendo en cuenta los pasos a seguir y la terminología que se debe utilizar. Se realiza un análisis de los algoritmos planteados en distintos textos, principalmente procedentes de la antigua Unión Soviética y se concluye con la bibliografía actual, que resulta la más operativa. Se persigue como objetivo principal valorar los diferentes enfoques teniendo en cuenta que estos textos aún existen en bibliotecas y pueden ser consultados por los estudiantes.

***Palabras claves**: Derivadas; Gráficas; Curvas; Algoritmos; Terminologías.*

Introducción:

En los programas de Matemática Superior se incluye en el Cálculo Diferencial la construcción de gráficas de funciones. Al aplicar las derivadas en este proceso se realiza una secuencia de pasos que hacen posible el trazado con precisión de la curva correspondiente y cualquier error cometido puede detectarse en el momento de la presentación.

Al analizar los pasos que plantean diferentes textos en los años comprendidos entre 1969 y 2003, principalmente procedentes de la antigua Unión soviética, se observan diferencias en cuanto a los mismos y a las terminologías utilizadas. No obstante reconocer la validez del proceso en cada caso y respetar lo que ofrecen textos reconocidos internacionalmente, el autor de esta monografía se inclina por las técnicas más actuales, de acuerdo a los avances didácticos en las Ciencias Matemáticas.

La esencia de este análisis se basa en una exposición cronológica de las diferentes vías y términos utilizados en el decursar del tiempo por autores como *N.Piskunov, B. Demidovich, L.D.Kudriatsev* y el colectivo de autores del texto Laboratorio de Matemática Superior, editado por primera vez en 1990, por segunda vez en 2002 y reimpreso en 2003.

Distintos enfoques en la aplicación de las derivadas a la construcción de gráficos de funciones.

Con los conocimientos adquiridos en la enseñanza media y media superior, los estudiantes que cursan carreras en las que la Matemática Superior resulta de fundamental importancia y en particular el Cálculo Diferencial, son capaces de elaborar gráficas de funciones clásicas: lineales, cuadráticas, cúbicas, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas o derivaciones directas de ellas, pero no pueden representar con exactitud funciones de otros tipos más complejos, las cuales en muchas ocasiones están vinculadas a procesos de la especialidad que cursan.

Aunque existe un denominador común en el algoritmo para llevar a cabo estas representaciones gráficas, en el decursar del tiempo se observan variaciones en diferentes textos consultados, los cuales datan respectivamente de las décadas entre 1960 y 2000. Estas variaciones a su vez, se han manifestado en la forma utilizada por cada profesor al impartir estos contenidos.

La mayor parte de la bibliografía analizada ofrece un algoritmo, que varía de acuerdo a la apreciación del autor. A continuación se refleja, de manera cronológica, el listado de pasos que propone un grupo de autores:

N.Piskunov, en el texto de 1969 Cálculo Diferencial e Integral, Volumen I. Páginas 199-200, plantea como pasos a seguir, la determinación del dominio de definición, la identificación de los puntos de discontinuidad a partir del dominio, el análisis de la monotonía mediante la primera derivada, la determinación de los extremos locales a partir de la monotonía, el análisis de la convexidad y la existencia de puntos de inflexión por medio de la segunda derivada y por último la determinación de las asíntotas.

En 1977, *B.Demidovich*, en el libro Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático, en los ejemplos que aparecen en la página 99, parte de la determinación del dominio y la paridad y a continuación halla los puntos de discontinuidad y las asíntotas verticales con el correspondiente comportamiento en la vecindad de cada una de ellas. Le sigue la determinación de las asíntotas oblicuas y finalmente el cálculo de la primera y segunda derivadas con sus correspondientes puntos críticos, a partir de los cuales se analizan la monotonía, los extremos locales, la concavidad y los puntos de inflexión.

L.D.Kudriatsev en el Volumen I del texto Curso de Análisis Matemático, que data de 1981 y fue traducido en 1983, ofrece en las páginas 260 y 261 los siguientes pasos: determinación del dominio, analizando continuidad y por ende puntos de discontinuidad, seguidamente las asíntotas y a continuación plantea realizar un primer intento del trazado del gráfico a grandes rasgos, el cual será perfeccionado en los siguientes pasos. Le siguen el cálculo de la primera y segunda derivada y los puntos críticos, lo cual permitirá el análisis de la monotonía, que a su vez proporcionará los extremos locales y de la convexidad, que hará posible la determinación de los puntos de inflexión.

Por último se hace referencia al texto Laboratorio de Matemática Superior, como ya se dijo editado por primera vez en 1990, por segunda vez en 2002 y reimpreso en 2003, que en las páginas 123-124, ofrece la siguiente secuencia de pasos: dominio, que permite obtener los puntos de discontinuidad, interceptos con los ejes coordenados, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, extremos locales y monotonía, puntos de inflexión y concavidad, y finalmente el trazado de la gráfica.

Como se puede observar, aunque no varía la esencia del proceso, cambia la secuencia y la forma de proceder. También hay variaciones en la terminología utilizada como se verá más adelante. No obstante, la transmisión de estos conocimientos se halla en dependencia del profesor que los imparte, de acuerdo a las características del estudiantado y de la creatividad que ponga en práctica.

Luego del análisis de los algoritmos planteados en los cuatro textos mencionados, puede arribarse a las siguientes conclusiones:

N.Piskunov se refiere a la determinación de las asíntotas como último paso, lo cual resulta más conveniente una vez hallados los puntos de discontinuidad. Al mismo tiempo, no se mencionan los interceptos y la paridad y en particular los primeros son de vital importancia para el trazado de la curva.

B.Demidovich ofrece un algoritmo operativo, aunque se observa también la no mención de los interceptos.

En cuanto a *L.D.Kudriatsev*, aunque la secuencia que plantea es también operativa, el primer intento del trazado de la gráfica, aunque resulta útil, está en dependencia de la apreciación de cada profesor y las características del alumnado. Es acertado el proceso inicial de derivación antes de la determinación de la monotonía, los extremos locales, la convexidad y los puntos de inflexión, para lo cual entrarán en juego ambas derivadas. Se observa también que no menciona los interceptos y la paridad.

El texto Laboratorio de Matemática Superior resulta el más acertado, al ofrecer el algoritmo de forma precisa y escueta.

En cuanto a la diferencia en las terminologías, se incluyen variaciones en vocablos que sin resultar erróneos pueden crear confusiones en quienes se enfrentan por primera vez a estos contenidos, entre ellos:

Limitación de la palabra intercepto a aquellos referidos al eje de ordenadas, llamando ceros a los interceptos con el eje de abscisas. Esto no constituye un error, pero resulta más específico referirse simplemente a interceptos, ya sea con uno u otro eje coordenado.

Denominación de polos a aquellos valores de la variable que anulan denominadores y por lo tanto constituyen puntos de discontinuidad.

Utilización variada de los vocablos cóncavo y convexo:

N.Piskunov, en la página 188 se refiere a convexa hacia abajo, a la que llama cóncava y convexa hacia arriba, a la que llama simplemente convexa.

Michael Spivak, quien no ofrece una determinada secuencia de pasos, en el texto Cálculo Infinitesimal, Volumen I, de 1970, habla en la página 280 de convexa cuando la curva abre hacia arriba y cóncavo cuando abre hacia abajo.

B.Demidovich, en la página 94 del texto mencionado, se limita a las nomenclaturas cóncava o convexa hacia abajo o hacia arriba, teniendo en cuenta que cóncava hacia abajo se refiere a convexa hacia arriba y respectivamente cóncava hacia arriba a convexa hacia abajo.

L.D.Kudriatsev solo utiliza la palabra convexa, hacia arriba o hacia abajo, mencionando como referencia la parte positiva o negativa del eje de ordenadas.

En los ejercicios de la página 124 de Laboratorio de Matemática Superior, se hace referencia solamente a cóncava hacia abajo o hacia arriba.

A lo largo de la historia han existido otras variaciones, que responden a veces a la creatividad de cada profesor:

Inclusión de un paso con el nombre comportamiento en el infinito que hace posible, además de la determinación de las asíntotas horizontales, la idea previa del comportamiento de la curva en sus extremos derecho e izquierdo. No obstante, es obvio que incluir las asíntotas horizontales como parte de la determinación de las oblicuas resulta mucho más operativo para agilizar el proceso.

En la determinación de la monotonía, convexidad y concavidad, algunos textos utilizan una tabla que proporciona los signos resultantes. El uso del rayo numérico, en concordancia con el proceso de resolución de inecuaciones cuadráticas usado en la enseñanza preuniversitaria, resulta mucho más operativo.

Con referencia a los criterios para determinar extremos locales y puntos de inflexión, generalmente se utilizan los de cambio de signo de las respectivas derivadas, aunque en ocasiones se hace uso de los criterios de la segunda derivada para extremos locales y de la tercera para puntos de inflexión. La utilización de una u otra vía, está en dependencia del criterio del profesor.

En cuanto al trazado de la gráfica, es conveniente el trazado paralelo a los cálculos (se incluye aquí el trazado a grandes rasgos al que se refiere *L.D.Kudriatsev*). La diferencia entre este trazado paralelo y el trazado al final es una cuestión de apreciación por parte del profesor, teniendo en cuenta cual vía resulta más factible para los estudiantes.

Es necesario referirse a la necesidad de abordar de la forma más asequible este contenido, que a veces resulta engorroso para los estudiantes al contemplar varios aspectos, ya sea el trazado de la curva con la realización de todo el proceso, el trazado conociendo de antemano algunos resultados parciales o la identificación de cada aspecto a partir de la gráfica de la función.

Conclusiones:

Luego de analizar las diferentes formas de abordar la construcción de gráficas de funciones utilizando el Cálculo Diferencial, se arriba a las siguientes conclusiones:

La secuencia de pasos más acertada y asequible es la utilizada en el texto Laboratorio de Matemática Superior.

Aunque se utilice una terminología específica, que responde a los textos más actuales, es conveniente al menos mencionar brevemente las usadas por otros autores, teniendo en cuenta que los profesores o estudiantes de manera individual, pueden en determinado momento consultar algunas de estas fuentes que aún se encuentran en las bibliotecas.

Debe utilizarse siempre el rayo numérico para los cambios de signo en las derivadas, siguiendo la metodología usada en la enseñanza preuniversitaria.

Es conveniente al menos en algunas ocasiones incluir en la determinación de los extremos locales y puntos de inflexión, ambos criterios, el de cambio de signo de la derivada correspondiente y el de la derivada que le sigue en orden.

El trazado paralelo o al final del análisis depende del criterio de cada profesor, pero se recomienda el primero, pues facilita detectar errores de cálculo en el momento en que se cometan.

Bibliografía.

JACK, H. *Engineer On A Disk - Manufacturing Integration and Automation* [on-line], 2003 [citado: marzo 30 de 2010], Grand Valley State University, Allendale, MI (USA) Disponible en: http://claymore.engineer.gvsu.edu/eod/pdf/automate.pdf.

ÖZEL, T.; NADGIR, A. Prediction of flank wear by using back propagation neural network modeling when cutting hardened H-13 steel with chamfered and honed CBN tools, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2002, 42 (3), p. 287 - 297.

TÁPANES, R. *Aplicación de la optimización multiobjetivo del proceso de torneado*, 83 h. Tesis en opción al título de Máster en Ciencias. Universidad de Matanzas “Camilo Cienfuegos”, Matanzas (Cuba). 2005.

TROTT, A.R.; WELCH, T. *Refrigeration and air-conditioning* (Third edition), Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.